62. (a) $f(x) = (x-1)e^x = (x-1)\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!} - \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} \underbrace{\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)}_{= \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{k}{(k+1)!}} - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\,x^{k+1}}{(k+1)!} - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-1)x^k}{k!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $R = \infty$.

(b) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $f'(x) = \frac{2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}$,

$f^{(n)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$ durch vollständige Induktion.

Taylorreihe: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!} x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$.

Für $q_n := \left| \frac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1)x^n} \right| = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)|x|$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = |x|$,
also konvergiert die Taylorreihe absolut für $|x| < 1$ nach dem Quotientenkriterium.

Die Reihe divergiert für $|x| > 1$, da $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)x^n \neq 0$

$\Rightarrow R = 1$.

(c) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$,

$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n}\prod\limits_{i=1}^{n}(2i-3)\, x^{\frac{2n-1}{2}}$ durch vollständige Induktion.

Taylorreihe um $x_0 = 1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ für $a_n := \frac{\prod_{i=1}^{n}(2i-3)}{2^n n!} = \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{2i-3}{2i}$.

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 2$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x-1)^n \neq 0$ wegen
$\lim\limits_{i\to\infty} \frac{2i-3}{2i} = 1$, also divergiert die Taylorreihe für $x > 2$

$\Rightarrow R \leq 1$.

Für $|x-1| < 1$ und $q_n := \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \frac{2n-1}{2n+2}|x|$
ist $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = |x| < 1$, also konvergiert die Reihe
absolut für $|x| < 1$ nach dem Quotientenkriterium $\Rightarrow R = 1$.

63. $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Für $|x|<1$ ist $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, da $\frac{x^{2n+1}}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-\ldots+x^{2n}$,

Taylorreihe von $\arctan(x)$ durch Interation der Summanden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

$q_n := \frac{2n+1}{2n+2}|x|$, $\lim_{n\to\infty} q_n = |x|$, nach dem Quotientenkriterium

konvergiert di Taylorreihe für $|x|<1$.

Die Reihe divergiert für $|x|>1$, da $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \neq 0$

$\Rightarrow R = 1$.

Für $x = i$ erhalten wir die Reihe $i + \frac{i}{3} + \frac{i}{5} + \ldots$,

die Reihe divergiert (siehe Aufgabe 39).

$\arctan(0{,}8) = 0{,}8 - \frac{0{,}8^3}{3} + \frac{0{,}8^5}{5} - a$ mit $|a| < 0{,}03$,

$\arctan(0{,}8) \approx 0{,}7$ bis auf einen max. Fehler von $0{,}1$.

64. (a) $f_n'(x) = \frac{1}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} \left(1 - \frac{x}{n}\right)$

Also wächst f_n in $[0,n]$ monoton, fällt in $[n,\infty)$ monoton und nimmt in $x=n$ ihr Maximum an.

(b) $0 \le f_n(x) \le f_n(n) = \frac{1}{en}$ für alle $n \ge 1$, $x \in [0,\infty)$.

Also konvergiert f_n gleichmäßig gegen 0.

(c) Durch die Substitution $t = \frac{x}{n}$ und partielle Integration erhalten wir

$$\int_0^a \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} dx = \int_0^{\frac{a}{n}} t e^{-t} dt = -(x+1)e^{-x} \Big|_0^{\frac{a}{n}}$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} dx = \lim_{a\to\infty} -\left(\frac{a}{n}+1\right) e^{-\frac{a}{n}} + 1 = 1.$$

65. (a) $P_A(t) = (t+2)(t+1)(t-1)^2$

(b) $E(-2) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$,

$E(-1) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$,

$E(1) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

(c) $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

66. (a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, also

$$p_A(t) = \det(A - tE_2) = t^2 - (a+c)\,t - b^2 .$$

Die Nullstellen $\frac{a+c + \sqrt{(a+c)^2 + 4b^2}}{2}$ sind reell, also sind die Eigenwerte reell.

(b) $p_A(0) = \det(A - 0 \cdot E_n) = \det(A)$. Nach Kapitel 7 ist A invertierbar genau dann, wenn A die darstellende Matrix (bzgl. der Einheitsbasis von $\mathbb{R}^n$) eines Isomorphismus ist.

Wenn A invertierbar ist, dann ist $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) =$
$= \det(E_n) = 1$, also ist $\det(A) \neq 0$.

Wenn A nicht invertierbar ist, dann sind die Zeilenvektoren linear abhängig. Nach Kapitel 12 ~~ist~~ (Satz 12.7) ist $\det(A) = \det(A')$, wobei A' durch Zeilenumformungen aus A entsteht und eine Zeile in A' ist 0. Dann ist $\det(A) = \det(A') = 0$ nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

67. $p_A(t) = (-3-t)(b-t)(2-t)$

Für $b \in \mathbb{R} \setminus \{-3,2\}$ hat p_A drei verschiedene Nullstellen. Die zugehörigen Eigenvektoren sind linear unabhängig und bilden daher eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Also ist A diagonalisierbar.

Für $b \in \{-3,2\}$ muss die Dimension der Eigenräume bestimmt werden. Ergebnis:

Für $b=-3$ ist $\dim(E(-3)) = 2$, also ist A diagonalisierbar.
Für $b=2$, $a=0$ ist $\dim(E(2)) = 2$, also ist A diagonalisierbar.
Für $b=2$, $a \neq 0$ ist $\dim(E(2)) = 1$, also ist A nicht diagonalisierbar.